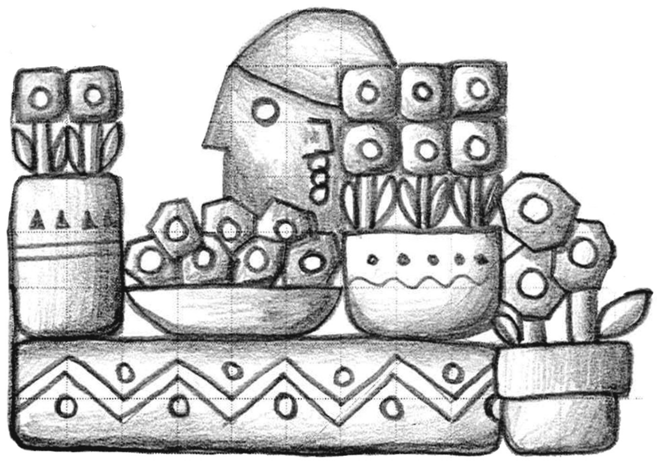


Imagen: Armando López Castañeda. *Según mis cálculos* (fragmento).

# Repartir y compartir

## Aprendizaje colaborativo en un círculo de alfabetización

Alicia Ávila

Universidad Pedagógica Nacional | México
avilaalicia693@yahoo.com.mx

### Introducción

Comprender la matemática escolar y su representación escrita es un componente esencial de la alfabetización. Pero el tránsito hacia dicho saber no es cosa simple, puesto que en su vida las personas sin escolaridad han actuado utilizando sus propias reglas de cálculo y de resolución de problemas y estas reglas no son idénticas a las que rigen el cálculo escolar.

En este artículo se expone cómo un grupo de jóvenes asistentes a un círculo de alfabetización resuelven problemas de reparto a partir de una situación que les resulta familiar: repartir equitativamente la cuenta que hay que pagar por una pizza. A partir de esta situación se observa el diálogo entre los saberes previos y los saberes escolares que se pretende comunicar, así como las auto-percepciones y preocupaciones que afloran en el proceso.

### Las participantes y su experiencia previa

Quienes participaron en esta experiencia fueron cuatro jóvenes que se encontraban al final de un proceso de alfabetización en un círculo de estudio promovido por un grupo de mujeres de posición económica alta de la Ciudad de México. Las cuatro jóvenes eran empleadas domésticas y su edad oscilaba entre los 20 y 25 años.[1] El trabajo en una zona residencial les había dado bastante experiencia con las compras en el supermercado e incluso con la compra de pizzas y otros alimentos que se venden en el lugar de preparación o que se entregan a domicilio. Los siguientes comentarios, derivados de observar el anuncio de pizzas con el que se inicia la actividad (ver imagen en la p. 36) testimonian la familiaridad con la situación:

> Margarita: “¡Una pizza!”.
> Cata: “¡De mole!”[2] [risas y comentarios, las pizzas de mole son una novedad un poco exótica].
> Martha y Cata (al unísono): “¡Las venden en Dóminos!”.
> Martha: “Atrás tiene el teléfono, son tres [teléfonos], la patrona tiene de esos, a veces pide, llevan a domicilio”.
> Norma: “Casi todas las pizzerías llevan a domicilio [...]”.

## La situación didáctica planteada

Las relaciones entre los datos dan lugar a distintos problemas de división. En la escolarización básica se trabajan dos tipos de problemas que involucran esta operación: problemas de repartir (o de “partir”, según el término utilizado en otros países latinoamericanos) y problemas de agrupar. Para el diseño de la situación que dio pie a este artículo se seleccionaron sólo los problemas más sencillos —los de repartir— puesto que era el primer acercamiento de las jóvenes al tema. La finalidad fue promover, a partir de una experiencia cotidiana, la resolución de problemas donde el dividendo es múltiplo del divisor. Se trataba de calcular de modo “que todos paguen parejo”, según palabras de las participantes.

La situación planteada se basó en el anuncio de las “Pizzas de mole con pollo”. Los problemas planteados, oralmente y por escrito, se trabajaron en dos sesiones de aproximadamente hora y media cada una y fueron del tipo: *entre cinco personas compran una pizza de 60 pesos, ¿cuánto pagará cada persona?*

Para modificar la dificultad de los problemas se varió el precio de la pizza y el número de personas que pagaron la cuenta. La estructura de los problemas se mantuvo sin modificación. En el cuadro pueden verse los datos de los problemas planteados:

| Número de problema | Costo de la pizza | Número de personas entre las que se distribuye la cuenta | Dato desconocido: cuánto paga cada persona |
|---|---|---|---|
| 1 | $30 | 3 | $10 |
| 2 | $30 | 2 | $15 |
| 3 | $40 | 5 | $8 |
| 4 | $39 | 3 | $13 |
| 5 | $60 | 6 | $10 |
| 6 | $60 | 5 | $12 |
| 7 | $60 | 10 | $6 |

## Primeras estrategias y primera dificultad

La dinámica de las sesiones fue la siguiente: resolver individualmente un problema (aunque no se impedían los intercambios); socializar los resultados y las estrategias de resolución; discutirlos y tomar acuerdos sobre la corrección de las soluciones. A excepción del problema tres (que las jóvenes no pudieron resolver), los problemas se resolvieron con diversas estrategias personales. Esta forma de resolución era la esperada, pues conforme a nuestra postura, la situación planteada generaría estrategias espontáneas de resolución propias de un primer acercamiento a estos problemas.

*Resolución del problema 1 (30 ÷ 3).* Se resuelve rápida y correctamente, por conteo de 10 en 10; todas lo hacen sin escribir, sólo se escucha murmurar "10, 20, 30"; la solución es: “¡cada persona paga $10!”.

*Resolución del problema 2 (30 ÷ 2).* Al finalizar la interacción a la que da pie este problema, las estudiantes han anotado en sus libretas:

<table>
<tr><th>Martha</th><th>Norma</th><th colspan="2">Margarita</th><th>Cata</th></tr>
<tr><td>15<br>15</td><td><br>15</td><td>10<br>5</td><td>10<br>5</td><td>| | | | | | | |<br>| | | | |<br>| | | | | | | | | | | |<br>| | | | |</td></tr>
</table>

Las estrategias de resolución son diversas. Martha utiliza cálculo mental y sólo anota su resultado; Norma hace igual; Margarita se vale de cocientes parciales, es decir que divide por partes: primero distribuye diez pesos a cada persona y después agrega cinco. Cata dibuja rayitas tratando de repartir uno a uno, pero no encuentra una estrategia útil para obtener la solución.

*Problema 3 (40 ÷ 5)*. Este problema no se resuelve. Las jóvenes muestran interés, reflexionan, pero no logran construir la solución. Los diálogos que se insertan en seguida hacen patentes los puntos de dificultad.

### *Intercambios que intentan llegar a una solución*

> Norma: "¡Póngale de a 4 personas! [en tono de broma, pero a la vez como indicando que de esa manera el problema resultaría más fácil; todas se ríen]".
> Margarita, que ha estado pensativa y murmurando durante sus intentos de resolución, le dice a Norma: "Es como con los billetitos: no tienes cambio y los tienes que cambiar", y sigue pensativa.[3]
> Margarita se dirige después a Marta; mostrándole las notas en su libreta le dice: "A uno le tocaría así, son 12 pesos, a otro le tocaría así, son 12 pesos, a otro le tocaría otros 12 pesos [...]".
> Martha: "No, pero así sale tres personas" [y el problema dice 40 ÷ 5].
> Margarita: "Sí, sale tres, por ejemplo, tú cambias un billete, y ese billete lo repartes entre los cuatro... vuelves a poner 10 pesos" [lo dice y a la vez hace algunas anotaciones, luego se queda viendo sus notas y dice] "¡No, pues entonces sí me saldría mal!" [risas], y continúa tratando de entender el problema.
> Cata, que ha estado pensativa, tratando de resolver, con su lápiz en la mano le dice a la investigadora: "¡Es que la puso muy difícil!".
> Margarita: "¡No le entiendo nada, ni jota!".

Y después de algunos intercambios se propone un problema que la investigadora consideró más fácil, puesto que no hace necesario "cambiar" monedas: "La pizza *vale $39 y la pagan entre 3*".

*Problema 4 (39 ÷ 3)*. El problema se resuelve mediante cocientes parciales. Las cuatro jóvenes se concentran en la tarea, y aunque la percepción es que sí podrán resolver el problema, obtener la solución no les resulta tan fácil. Lo que sí parecen tener claro es que el reparto debe ser equitativo:

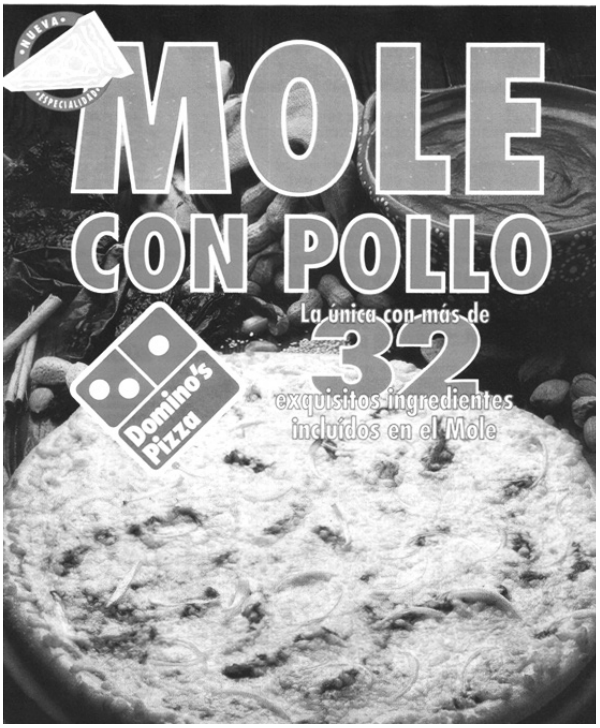
> Norma: "Unos que pongan 10 y el otro que ponga 19" [en todo de broma; risas].
> Martha: [se pone seria] "¡No, tiene que poner igual!".
> Norma: "Pero también puede ser así, ¿o no?".
> Inv: "Bueno, también puede ser así, pero el que pusiera 19 saldría bien amolado"[4] [risas].
> Martha: "¡Deben poner igual todos!".
> Cata: "Que sea *pareja la cosa*" [risas].

Las notas que quedan en sus libretas al final del episodio son:

<table>
<tr><th>Martha:</th><th>Norma:</th></tr>
<tr><td>10 - 10 - 10 o o o o o o o o o o<br><br>[Finalmente, Martha anota así el resultado]<br><br>10 . o o o</td><td>13 13 13<br><br>Abajo de la solución, a manera de apunte, Norma anotó:<br><br>10 10 10 | | | | | | | | |</td></tr>
<tr><th>Margarita:</th><th>Cata:</th></tr>
<tr><td>| | |<br>10 10 10<br>| | |   | | |   | | |</td><td>| | | | | | | | | | | |<br>| | | | | | | | | | | |<br>| | | | | | | | | | | | |<br>| |</td></tr>
</table>

## Colaboración que permite corregir y resolver

A las resoluciones y escrituras anteriores les precedió una serie de intercambios cuyo valor colaborativo resultó muy importante.




Margarita: "¡Ya, saldé la cuenta!" [se refiere a que ya obtuvo 14 como resultado, pero regresa a revisar sus apuntes, murmura con la vista fija en ellos y de repente pregunta a la investigadora]: "14 y 14, ¿cuánto sería?".
Inv: "¿14 y 14?, serían 28".
Margarita: "28 [como guardándolo en la memoria] ¿y otro 14?".
Inv: "Serían 42".
Margarita [dirigiéndose a Norma]: "Entonces sí me salió".
Norma: "¡Pos no te salió, porque son 39!" [lo que costó la pizza, y tú sacaste 42].
Margarita: "¡Ay, Dios!".
Norma, dirigiéndose a Margarita: "Cuenta de 13 en 13" [en tono de recomendación].
Margarita: "¡Ah!" [parece que intenta hacerlo, pero le dice a Martha]: "¡Martha, facilítame tu dinero!" [se ríen].
Norma [dirigiéndose de nuevo a Margarita]: "cuenta de tres, tres [grupos] de tres, porque son tres, luego ya los juntas [con los de diez] y ya te sale [con base en estas sugerencias, se corrige la solución].

Se ve cómo la interacción colabora, de manera que quien tiene dificultades encuentra un camino hacia la solución. Las ayudas no consisten en "decir la respuesta", sino en señalar el camino para obtenerla.

Cata ha estado callada. En algún momento la investigadora le pregunta:

> Inv: "¿Qué hiciste, Cata?".
> Cata: "¡Pos no sé! Ya puse 39, ¿pero ahora qué sigue?".
> La investigadora se detiene a ayudarle.

Al final del episodio Cata no ha borrado ni anotado nada en su libreta más allá de las 39 rayitas, ahora organizadas en tres filas, pero ha seguido atentamente el intercambio entre sus compañeras. Es muy probable que de esta manera también esté aprendiendo.

*Resolución del problema 5: 60 ÷ 6*. Se resuelve con cálculo mental, aunque con cierta lentitud, pues surge otra dificultad.

> Sólo Norma resuelve rápido, con cálculo mental: "¡Yo ya la tengo!" [se entusiasma]. Norma anotó en su libreta:
> 10 10 10 10 10 10 $60
> Las demás están pensativas, mueven los dedos y murmuran, tratan de encontrar la solución, pero les lleva tiempo hacerlo.

Este problema es similar al problema 1 en estructura; además, la relación numérica entre dividendo y divisor es equivalente: 60 ÷ 6 = 30 ÷ 3. No obstante, a pesar de que en los dos casos la solución se podría construir de manera similar y el resultado es "cada persona pone $10", la distancia entre el divisor y el dividendo aumentó la dificultad.

### *La importancia de la estimación y la ayuda de quien sabe más*

> Inv: [al observar que Martha, Cata y Margarita están *atoradas*"[5]]: "A ver, vamos a pensar un poco: si

entre 6 personas tienen que pagar los sesenta pesos, ¿cuánto tendrá que poner cada quién?, ¿unos cinco pesos?".
[Cata se queda pensativa, luego mueve la cabeza denegando].
Inv. [a Margarita]: "¿Y tú qué dices?".
Margarita: "Seis personas, por cinco pesos… no, juntarían nomás unos veinte pesos".
Inv: "¿Y si ponen unos ocho?".
Cata y Margarita no contestan, se ponen a calcular mentalmente, se ven concentradas, parece que la sugerencia de la investigadora les fue útil.
Margarita: "No, no da" [si cada quien pone $8].
Inv: "Margarita dice que no sale de a ocho, ¿tú que dices, Cata?".
Cata: "Que no sale, sale de a 10".

Al final del intercambio, todas han anotado en sus libretas esta solución:

10 10 10 10 10 10 $60,

o simplemente

10 10 10 10 10 10

No deja de llamar la atención esta forma de expresar la solución. Parece que no les es suficiente anotar un único 10, sino tantos dieces como personas hayan puesto dinero. Finalmente, ya que el problema refería a ese número de personas, anotándolas a todas se comunica mejor la solución.

## Auto-percepciones y preocupaciones que afloran

Las preocupaciones que afloran en las participantes a lo largo del proceso las muestran como aprendices de matemáticas, y a la vez como personas que se auto-perciben y se autoevalúan permanentemente, con base en deseos que van más allá de los aprendizajes específicos. Los que siguen son fragmentos de distintos momentos del proceso que reflejan lo anterior.

### *El deseo de ser eficaces y abandonar la manipulación de material*

Inv: "Como Margarita dijo la semana pasada que era más fácil resolver con el dinerito, para las que creen que es más fácil con el dinerito, aquí hay dinerito, para que tomen lo que necesiten, si es que necesitan".
Margarita: "Pero no siempre vamos a poder hacerlo con eso" [en tono que expresa aflicción].
Inv: "Tienes razón, Margarita, no siempre vamos a poder hacerlo con eso, también vamos a tener que hacerlo nada más pensando o escribiendo, pero si no podemos hacerlo así, pues lo hacemos con el dinerito".
Margarita: "¡Sí, pero me tardo un año!" [continúa afligida].
Inv: "¿Cómo que te tardas un año?".
Margarita: "¡Me tardo un año en resolverlo!" [aún con tono afligido, aunque ahora también un poco teatral].

Margarita no está conforme con su procedimiento, a ella le ha sido útil utilizar el dinerito, pero sabe que hay procedimientos más rápidos y eficaces que cambiar y distribuir físicamente el material. Ella aspira a dominar esos otros procedimientos.

### *La preocupación por la validez del cálculo mental*

Otra cuestión que preocupa a todas las participantes es cómo saber si los cálculos realizados son correctos.

Martha: "Diez cada una…".
Inv: "¿Ya la hiciste, Martha?".
Martha: "No".
Inv: "Entonces ¿cómo dices que te salió 10?, ¿sacaste la cuenta en la cabeza?".
Martha: "Sí, pero no sé si salió bien o salió mal". [Martha no parece convencida del resultado obtenido mentalmente, entonces anota al reverso de su

hoja a la vez que murmura: 10 10 10 10 10 10, mira su apunte unos momentos, finalmente parece quedar satisfecha].

Martha tenía una gran habilidad en el cálculo mental. Su preocupación por saber si su solución es correcta puede ser reflejo de cierta desconfianza en ese tipo de cálculo, o de que al internarse en el mundo de la escritura ha disminuido su confianza en él. Tal inquietud aparece más de una vez entre las jóvenes. "¿Pero cómo sabemos si está bien?", es pregunta que todas plantean en algún momento, principalmente cuando su solución la obtuvieron sin escribir.

La minusvaloración del cálculo mental, probablemente aumentada cuando se comienza a manejar la escritura matemática, la observé también en otra experiencia basada en una situación similar. Ahí, una mujer de aproximadamente 40 años me dijo después de haber resuelto un problema correctamente: "Yo el problema que tengo es que lo hago mental, después ya no lo sé explicar, pero estamos mal, ¿no maestra?". "¿Por qué?". "Porque la hacemos sin escribir [...]".

## Conclusiones

Las jóvenes participantes en esta experiencia estaban familiarizadas con la situación planteada: distribuir equitativamente el pago de una cuenta. Esta situación les resultó de interés y fue útil para que avanzaran en su capacidad de resolver problemas de reparto. Incluso Cata, que al inicio decía "¿y ahora qué sigue?", parece haber aprendido de escuchar los intercambios de las compañeras y al final muestra poder resolver los problemas.

Algunos problemas resultaron fáciles, por ejemplo cuando la relación numérica entre dividendo y divisor pudo establecerse mediante conteo o cálculo mental, utilizando combinaciones numéricas conocidas. En cambio, resultó difícil manejar distancias "grandes" entre dividendo y divisor, aun siendo el primero múltiplo del segundo; fue el caso del problema que involucró la división 60 ÷ 6.

Sabemos que la división es una operación que involucra la suma, la resta y la multiplicación, y que por eso, cuando se desconoce el algoritmo puede resolverse utilizando esas operaciones. Pero las jóvenes participantes, que apenas iniciaban su aprendizaje matemático escolar, aún no sabían las tablas de multiplicar. El hecho de pensar aditivamente los problemas y utilizar la suma para probar los cocientes hizo más difíciles los cálculos, pues al no tener disponibles combinaciones multiplicativas para "probar" con agilidad la validez de los resultados que se obtenían, la prueba del cociente podía resultar muy lenta. En tal sentido, se puede afirmar que las tablas de multiplicar son una herramienta muy útil para facilitar los cálculos y la estimación de los cocientes.

Tener que "cambiar" para hacer el reparto también resultó difícil; esta dificultad se hizo evidente cuando las monedas de $10 eran insuficientes para "distribuir" al menos una a cada una de las personas que pagarían la cuenta. Fue el caso del problema que implicó la división 40 ÷ 5 que, según nuestras previsiones (erróneas), resultaría fácil de resolver. Fue sin duda un error didáctico no haberlo planteado una vez más al final de la secuencia, pues no pudimos saber si en este momento resultaría resoluble.

Como quiera que sea, las participantes se involucraron con la situación, compartieron conocimientos y estrategias de resolución, y se ayudaron a aprender. También se autoevaluaron y quizás se fijaron metas personales más allá de las situaciones específicas planteadas, como prescindir "del dinerito" al hacer los cálculos.

## Recomendaciones para la acción

Como hemos visto, en el proceso de aprender a resolver problemas de dividir hay cuestiones que resultan fáciles, y otras que resultan difíciles. Los problemas sencillos de repartir constituyen apenas un acercamiento inicial al tema. Pero resolver problemas de división con las características y condiciones que se plantean a lo largo de la educación primaria implica conocimientos y habilidades diversas: estimar cocientes, saber las tablas de multiplicar para facilitar la búsqueda de los cocientes. A la vez, se necesita entender que no todos los resultados se encontrarán en las tablas de multiplicar. También es necesario generar una escritura para anotar los cálculos y resultados parciales y no perder de vista la pregunta que plantea el problema. Esto último porque es fácil que en el proceso de realizar los cálculos parciales se pierda el sentido de dichos cálculos y su relación con el problema planteado.

El tránsito del saber de la experiencia al saber escolar es largo y presenta dificultades. Pero la experiencia aquí presentada permite ver que la acción colaborativa es fundamental para hacer avanzar los aprendizajes, y que puede haber momentos estimulantes y satisfactorios en el tránsito hacia el saber escolar, siempre y cuando el aprendizaje se gestione con la mirada y la escucha puesta en quienes aprenden, y con interés y compromiso hacia ellos o ellas.

Por supuesto, para trabajar los problemas de división también queda la opción de introducir la calculadora, que además de facilitar los cálculos resulta atractiva a las personas. Es cosa de analizar en qué momento y con qué objetivo incorporarla.

## Lecturas sugeridas

Ávila, Alicia (2012), "Estudiar matemáticas en una primaria nocturna. Logos y praxis en un proyecto con orientación social", *Educación Matemática*, vol. 24, núm. 2, pp. 37-60, en: http://www.redalyc.org/pdf/405/40525862003.pdf.

Ávila, Alicia (2003), "Cálculo escrito y pérdida de significación", Decisio. *Saberes para la Acción en Educación de Adultos*, primavera, pp. 22-26, en: http://www.crefal.edu.mx/decisio/images/pdf/decisio_4/decisio4_saber5.pdf

Block, David, Patricia Martínez y Eva Moreno (2013), *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria*, México, Ediciones SM.

Sáiz, Irma (1994). "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir", en Cecilia Parra e Irma Sáiz (comps.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós, col. Educador, pp. 185-218, en: http://es.slideshare.net/ZeebaXtian/didctica-de-las-matemticas-aportes-y-reflexiones-glvezbrousseausadovsky-y-otros

**Notas**

1. Para referirme a las participantes, he utilizado los nombres de Cata, Martha, Margarita y Norma.
2. El mole es una salsa que se elabora en México con la combinación de varios chiles y especies.
3. Margarita se refiere a los billetes y monedas de papel que la investigadora proporcionó al inicio de la experiencia como apoyo para la resolución de problemas aritméticos.
4. En este contexto el significado de "salir amolado" es "salir perjudicado".
5. Es decir, que han llegado a un punto a partir del cual ya no han podido avanzar.